Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

1. Izpit iz OME
28. januar 2019

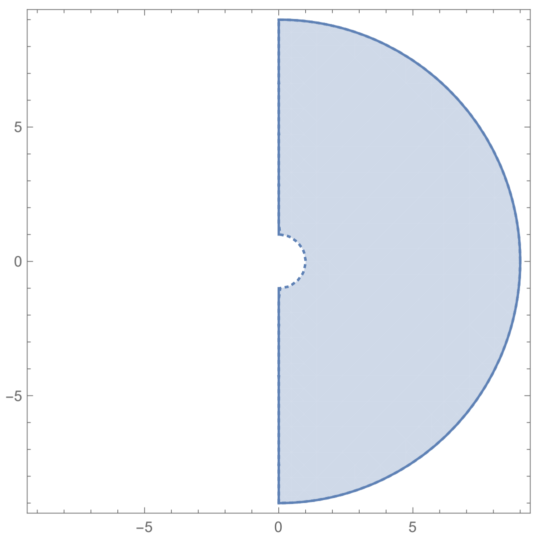
- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. **[15 točk] Kompleksna števila**

   (a) Izračunajte $|3-4i|$ ter imaginarni del števila $\left((37+29i)\cdot\overline{(37+29i)}\right)^2$.

   Velja:
   $$|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
   in
   $$\left((37+29i)\cdot\overline{(37+29i)}\right)^2 = |37+29i|^4 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Im}\left(|37+29i|^4\right) = 0.$$

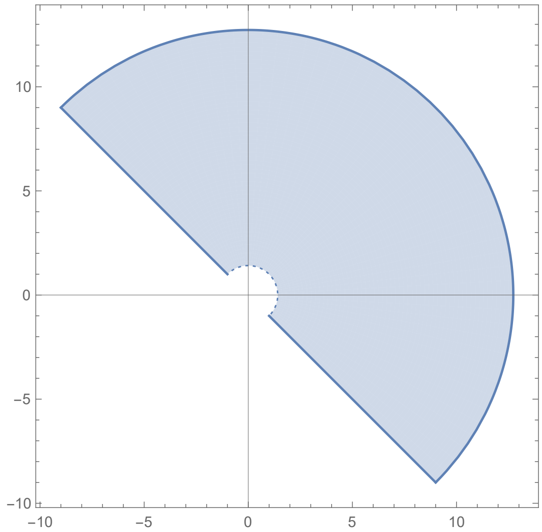
   (b) V kompleksni ravnini skicirajte območje
   $$\mathcal{D} = \{z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C};\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 1 < |z| \le 9\}.$$



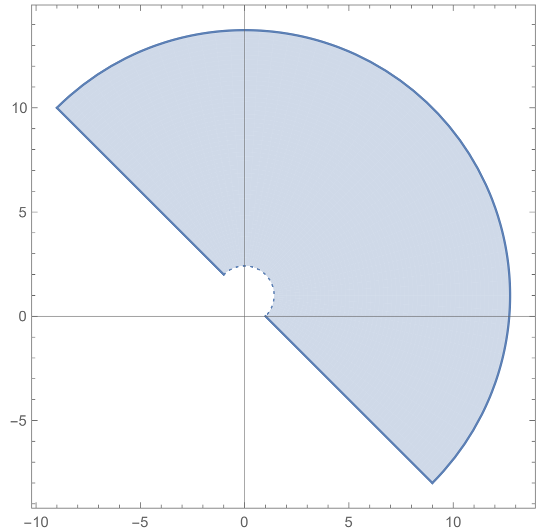
(c) Narišite sliko območja, v katerega se območje $\mathcal{D}$ preslika z preslikavo $z \mapsto z(1+i)+i$.

Velja $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Torej je

$$(1+i)\mathcal{D} = \left\{ z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C};\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \sqrt{2} < |z| \leq 9\sqrt{2} \right\}.$$



Območje $(1+i)\mathcal{D}+i$ dobimo s premikom območja $(1+i)\mathcal{D}$ za vektor $(0,1)$.



2. **[10 točk] Zaporedja in vrste**

(a) Zapišite definicjo limite zaporedja.

Število $L \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $(a_n)_n$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n \geq N$ velja $|a_n - L| < \epsilon$.

(b) Izmed naslednjih vrst obkrožite vsako vrsto, ki je konvergentna:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ni konvergentna, saj $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 0$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ je geometrijska vrsta z začetnim členom $a = -\frac{2}{3}$ in kvocientom $k = -\frac{2}{3}$. Ker je $|k| < 1$, je vrsta konvergentna in njena vsota je enaka $\frac{a}{1-q}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n}\right)$ ni konvergentna, saj bi bila v nasprotnem primeru tudi harmonična vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergentna.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)$ ni konvergentna, saj $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2} \neq 0$.

3. [**15 točk**] **Funkcije**

(a) Definirajte limito funkcije dveh spremenljivk v točki (a, b).

Vrednost $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a, b), če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsako točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ki zadošča pogoju $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, velja $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

(b) Za funkcijo $g(x) = x^4 + 5x + 1$ poiščite kak interval dolžine $1/2$, na katerem ima funkcija ničlo.

Izračunamo $g(0) = 1$,

$$\begin{aligned} g(1/2) &= (1/2)^4 + 5(1/2) + 1 > 0, \\ g(-1/2) &= (-1/2)^4 + 5(-1/2) + 1 < 0. \end{aligned}$$

Ker je g zvezna funkcija, ki je v točkah $-1/2$ in 0 različno predznačena, ima na intervalu $(-1/2, 0)$ gotovo vsaj eno ničlo.

(c) Obkrožite pravilne trditve:

- Obstaja liha injektivna funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Obstaja soda injektivna funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Vsaka liha funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je injektivna.
- Vsaka soda funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je injektivna.

Pravilna je samo prva trditev.

- Primer lihe injektivne funkcije je $f(x) = x$.
- Vsaka soda funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadošča pogoju $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, torej ne more biti injektivna.
- Primeri lihih funkcij, ki niso injektivne:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \qquad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}, \\ f_2(x) &= \sin x, \\ f_3(x) &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- Če ne obstaja soda injektivna funkcija, potem tudi vsaka soda funkcija ne more biti injektivna.

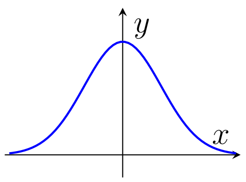
4. **[15 točk] Odvod funkcije ene spremenljivke**

   (a) Razložite linearno aproksimacijo funkcije v dani točki. Približno izračunajte $\sqrt{1.1}$.

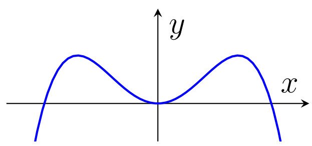
   Linearna aproksimacija funkcije f v točki x_0 je $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pri tem funkcijsko vrednost v okolici izbrane točke x_0 aproksimiramo s pomočjo tangente na graf funkcije v točki x_0.

$$\sqrt{1.1} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}(1.1 - 1) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{10} = 1.05.$$

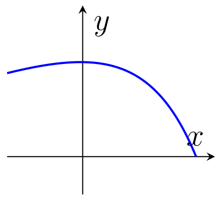
   (b) Za funkcije $g, h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imamo podane njihove grafe na intervalu $[-3, 3]$.



graf g



graf h



graf k

   Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f'(-2) = -f'(2)$ in $f''(0) > 0$. Obkrožite graf funkcija f?

   Pogoju $f'(-2) = -f'(2)$ zadoščata grafa g in h. Pogoju $f''(0) > 0$ pa zadošča samo graf h, saj je konveksen v okolici 0.

   (c) Izmed funkcij v točki (b) izberite tisto, katere drugi odvod je monotona (naraščajoča ali padajoča) funkcija.

   Graf g prehaja iz konveksnega v konkavnega in nato ponovno v konveksnega. Torej drugi odvod preide iz pozitivnih vrednosti v negativne, ter nato ponovno v pozitivne. Zato ni monotona funkcija. Podobno velja za graf h. Graf k pa je ustrezen.

5. **[15 točk] Odvod funkcij več spremenljivk**

   (a) Zapišite definicijo parcialnega odvoda funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ po spremenljivki x.

   Parcialni odvod po spremenljviki x funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ v točki (a, b) je enak

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

   če ta limita obstaja.

   (b) Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere parcialna odvoda v točki $(1, 1)$ sta -2 in 1.

   Najenostavnejši primer funkcije je linearna funkcija $f(x, y) = ax + by$. Veljati mora $-2 = f_x(1, 1) = a$ in $1 = f_y(1, 1) = b$. Torej je $f(x, y) = -2x + y$.

(c) Naj bosta f in g odvedljivi funkciji dveh spremenljivk, katerih nivojnice so krivulje. Podajte potreben pogoj za obstoj vezanega ekstrema funkcije f pri konstantni vrednosti g.

Tvorimo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c),$$

kjer je $g(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, nivojnica g, na kateri iščemo ekstremne vrednosti funkcije f. Potrebni pogoji za vezane ekstreme so

$$L_x(x, y, \lambda) = L_y(x, y, \lambda) = L_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

6. **[30 točk] Integral**

(a) Zapišite definicijo določenega integrala funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Določeni integral funkcije f je število $I \in \mathbb{R}$, za katerega velja, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da vsako delitev intervala

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

ki zadošča $x_{i+1} - x_i < \delta$ za $i = 0, \ldots, n-1$, in vsako izbiro vmesnih točk $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za $i = 1, \ldots, n$, velja

$$|f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) - I| < \epsilon.$$

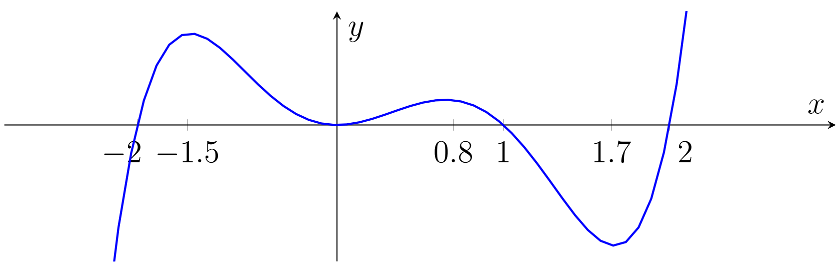
(b) Izmed naslednjih funkcij obkrožite tiste, ki spadajo med nedoločene integrale funkcije $(2x)^{-1}$:

$$\ln|2x| \qquad \frac{\ln|2x|}{2} \qquad \frac{\ln|x|}{2} \qquad \ln|x|$$

Rešitev. Velja:

$$(\ln|2x|)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}, \qquad \left(\frac{\ln|2x|}{2}\right)' = \frac{1}{2x}, \qquad \left(\frac{\ln|x|}{2}\right)' = \frac{1}{2x}, \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

(c+d) Dobro si oglejte graf *odvoda* h' funkcije $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Določite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije h?

Rešitev. Lokalna minimuma sta pri $x = -2$ in $x = 2$, lokalni maksimum pa pri $x = 1$.

Določite prevoje funkcije h in pri vsakem izmed njih zapišite, ali gre za prehod iz konveksnosti v konkavnost ali obratno?

Rešitev. Prevoji so ničle h'', kjer h'' spremeni predznak. To so $-1.5, 0, 0.8, 1.7$. Prehod iz konkavnosti v konveksnost je pri 0 in 1.7.

(e) Naj za funkcijo h iz točke (c+d) velja $h(-1) = 0$. Kakšna sta predznaka integralov $\int_{-2}^{-1} h(x)dx$ ter $\int_{-1}^{0} h(x)dx$?

Rešitev. Ker je h' na intervalu $(-2, 0)$ pozitiven, tam funkcija h narašča. Ker je $h(-1) = 0$, je na intervalu $(-2, -1)$ negativna, na intervalu $(-1, 0)$ pa pozitivna. Zato je $\int_{-2}^{-1} h(x)dx$ negativen, $\int_{-1}^{0} h(x)dx$ pa pozitiven.

(f) Zakaj pri izračunu nedoločenega integrala na koncu običajno dodamo konstanto?

Rešitev. Nedoločeni integral funkcije je do konstante natančno določen. Če je namreč funkcija F eden od nedoločenih integralov funkcije f, tj. $F'(x) = f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja, potem je tudi $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, nedoločeni integral funkcije f, tj. $(F + c)'(x) = F'(x) = f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja.